Електродинаміка-2023

Лекція № 16

5. РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Рівняння руху заряду в електромагнітному полі у 4-формі ми вивели за допомогою принципу найменшої дії. Так само можна вивести й рівняння поля, якщо побудувати відповідну функцію дії для системи заряджені частинки плюс електромагнітне поле.

5.1. Перша пара рівнянь Максвелла

Першу пару рівнянь Максвелла ми фактично вже отримали одночасно з рівнянням руху заряду в полі. Згадаємо зв'язок векторного та скалярного потенціалів з напруженостями електричного та магнітного полів

$$\vec{H} = rot\vec{A};$$
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \tag{5.1}$$

З формул (5.1) можна отримати зв'язок між напруженостями. Розрахуємо ротор напруженості $\vec{E}$:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \mathrm{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\right) = -\left(\frac{1}{c}\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \mathrm{rot}\left(\nabla\varphi\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\mathrm{rot}\vec{A}}_{=\vec{H}} - \underbrace{\left[\nabla,\nabla\right]}_{=0}\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Маємо

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Відшукаємо дивергенцію напруженості магнітного поля $\vec{H}$:

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \left(\nabla, \left[\nabla, \vec{A}\right]\right) = 0.$$
$$\mathrm{div}\vec{H} = 0.$$

Вивели першу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Розв'язки цих рівнянь – це формули (5.1). Напишемо їх ще раз

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A};$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi.$$

Потенціали $\vec{A}, \varphi$ залишилися не визначеними. Першої пари рівнянь Максвелла не достатньо для визначення напруженостей поля $\vec{E}$ та $\vec{H}$. Це видно хоча б з того, що рівняння (5.2) не є симетричними відносно напруженостей. Рівняння

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

визначає часову еволюцію $\vec{H}$ – похідну $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, але похідну $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ще не визначено.

Продовжимо поки аналізувати першу пару рівнянь Максвелла.

За допомогою теореми Гауса

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dV.$$

(потік вектору через довільну замкнену поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього вектору по об’єму, обмеженому цією поверхнею).

та теореми Стокса

$$\oint_C \vec{a}d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{a}d\vec{S}$$

(циркуляція вектору уздовж довільного замкненого контуру дорівнює інтегралу від потоку ротору цього вектору через поверхню, натягнуту на цей контур).

Теорему Гауса інколи в англомовних джерелах називають «дивергентною теоремою», а теорему Стокса «роторною теоремою».

Перша пара рівнянь Максвелла в інтегральній формі виводиться так

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{H}dV = 0; \quad \oint\!\!\!\oint_S \vec{H}d\vec{S} = 0.$$

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}d\vec{S}; \quad \oint_C \vec{E}d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{H}d\vec{S}.$$

Отримали такі рівняння

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0;$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{H} d\vec{S}. \tag{5.3}$$

Прокоментуємо перше з рівнянь в (5.2) або (5.3). Це рівняння в інтегральному вигляді (5.3) встановлює, що потік вектору магнітного поля через довільну замкнену поверхню завжди дорівнює нулю. Це є наслідком відсутності магнітних зарядів. Дивергенція вектору характеризує інтенсивність джерел поля в даній точці простору. Якщо джерел немає, то дивергенція дорівнює нулю. Саме тому завжди (див. (5.2)) $\mathrm{div}\vec{H} = 0$. Силові лінії магнітного поля або замкнені, або починаються на нескінченності та знов уходять на нескінченність. Перше з рівнянь (5.2) або (5.3) є математичним «наслідком» цього дослідного факту.

Обговоримо тепер друге з рівнянь (5.2) або (5.3). В інтегральному вигляді це рівняння є не що інше, як закон електромагнітної індукції Фарадея (1831)

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{5.4}$$

Тут $\Phi = \iint_S \vec{H} d\vec{S}$ – магнітний потік.

Згадаємо поняття електрорушійної сили. Це робота, яку виконує електричне поле по переміщенню одиничного додатного заряду уздовж замкненого контуру або циркуляція вектору

$$\varepsilon_{ind} = \oint_C \vec{E} d\vec{r} \tag{5.5}$$

В рівнянні

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{H} d\vec{S}$$

Справа пишеться частинна, а не повна похідна по часу, бо контур вважається нерухомим. Змінюється тільки поле в даній точці. Змінне магнітне поле породжує електричне поле. Тобто це електричне поле без джерел (зарядів). Електричне поле утворюється не тільки зарядами, а й змінним магнітним полем.

Першу пару рівнянь Максвелла можна написати в 4-формі. За допомогою тензору електромагнітного поля (ф-ла (4.27))

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0. \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l}-\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\right)=0;$$

$$\xcancel{\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^i}}-\cancel{\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k}}+\bcancel{\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i \partial x^k}}-\xcancel{\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^l}}+\cancel{\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l}}-\bcancel{\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^i}}=0.$$

Ліва частина (5.6) є повністю антисиметричним тензором 3-го рангу. Його компоненти не дорівнюють нулю тотожно, тільки, якщо $i \neq k \neq l$. Таких рівнянь є чотири.

Компоненти F_{ik} через напруженості визначаються формулою (4.31)

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $i=1, j=2, k=3$ (просторові компоненти)

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x^2}=0; \quad -\frac{\partial H_z}{\partial z}-\frac{\partial H_x}{\partial x}-\frac{\partial H_y}{\partial y}=0.$$

$$\mathrm{div}\vec{H}=0.$$

Отримали дивергентне рівняння першої пари рівнянь Максвелла.

Ще три рівняння знайдемо, якщо одна з координат є часовою, а дві інші – просторовими. Це будуть проекції роторного рівняння на осі декартових координат:

$$i=0, j=1, k=2;$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{20}}{\partial x^1}=0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad \left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_z=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

$$i=0,\ j=1, k=3;$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{30}}{\partial x^1}=0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_y=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

$$i=0,\ j=2, k=3;$$

$$\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2}=0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad \left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_x=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}.$$

Отримали роторне рівняння – закон електромагнітної індукції

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Таким чином, перевірили, що формула (5.6) є записом першої пари рівнянь Максвелла у 4-формі. Можна (5.6) написати за допомогою повністю антисиметричного одиничного тензору 4-рангу, виконавши згортання по трьох індексах

$$\varepsilon^{iklm}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}=0. \tag{5.7}$$

Наприклад, якщо візьмемо $m=0,$ отримаємо

$$\varepsilon^{ikl0}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}=\varepsilon^{1230}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}+\varepsilon^{2130}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^3}+\varepsilon^{1320}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}+\varepsilon^{3120}\frac{\partial F_{31}}{\partial x^2}+\varepsilon^{2310}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\varepsilon^{3210}\frac{\partial F_{32}}{\partial x^1}=$$

$$=2\left(\varepsilon^{2310}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\varepsilon^{1320}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}+\varepsilon^{1230}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}\right)=$$

$$=2\left(\underset{-1}{\varepsilon^{2310}}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\underset{+1}{\varepsilon^{1320}}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}+\underset{+1}{\varepsilon^{1230}}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}\right)=2\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)=2\mathrm{div}\vec{H}=0.$$

5.2. Функція дії для електромагнітного поля

Для виведення другої пари рівнянь Максвелла потрібно знайти вигляд функції діє для системи частинок та електромагнітного поля. Поки побудували функцію дії для частинок та для взаємодії частинок з полем. Потрібно ще додати функцію дії для поля без частинок.

$$S=\underset{\textit{вільні частинки}}{S_m}+\underset{\substack{\textit{взаємодія частинок}\\ \textit{з полем}}}{S_{mf}}+\underset{\textit{поле}}{S_f} \tag{5.8}$$

Функція дії для однієї вільної частинки визначена раніш (ф-ла (3.9))

$$S = -mc\int ds = -mc^2\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt.$$

Узагальнення на систему частинок буде таким

$$S_m = -\sum_a m_a c\int ds_a = -\sum_a m_a c^2\int\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}dt. \qquad (5.9)$$

Індекс a нумерує частинки. Домовимось для частинок користуватися першими літерами латинського алфавіту, щоб не плутати нумерацію зарядів та індекси 4-простору.

Вже знаємо функцію дії для заряду, яких взаємодіє із зовнішнім полем (ф-ла (4.5))

$$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int A_i dx^i.$$

Узагальнимо на довільну кількість зарядів

$$S_{mf} = -\sum_a \frac{e_a}{c}\int A_i(x_a)dx_a^i. \qquad (5.10)$$

Значення потенціалу A_i береться в тих точках, де знаходиться певний заряд e_a.

Сума $S_m + S_{fm}$, таким чином, нам вже відома.

Частина S_f, яка залежить тільки від поля, тобто дія для поля у відсутності зарядів, при виведенні рівняння руху заряду в полі на була потрібна. Якщо ми хочемо знайти рівняння, які визначають еволюцію поля, то ми повинні врахувати S_f. Це очевидно ще й з того, що за допомогою $S_m + S_{fm}$ ми змогли знайти тільки 2 рівняння, яких недостатньо для повного визначення поля.

Яким вимогам повинна задовольняти дія S_f?

1. S_f повинна бути релятивістським інваріантом, що випливає з принципу відносності;
2. S_f повинна задовольняти принципу суперпозиції

$$\vec{E} = \sum_a \vec{E}_a; \quad \vec{H} = \sum_a \vec{H}_a,$$

який є дослідним фактом. Диференціальні рівняння, які ми шукаємо повинні бути лінійними.

3. Потенціал A_i не може входити до S_f, бо визначений неоднозначно. Скаляр (інваріант) треба будувати з компонент F_{ik}, F^{ik} у другому степені, щоб виконувався принцип суперпозиції.
Знаємо два інваріанти поля, які у 4-формі виглядають так (ф-ли (4.49))

$$F_{ik}F^{ik} - \text{inv.};$$
$$\varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} - \text{inv.}$$

Обираємо $F_{ik}F^{ik}$ – дійсний скаляр, бо $\varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ є повною дивергенцією, його варіація дорівнює 0, тому в «рівняння руху» для поля від вкладу не дасть. До того ж це псевдоскаляр.

4. Постулюємо (щоб задовільними дослідні закони електромагнетизму), що рівняння поля повинні мати похідні по координатах та по часу від потенціалів не вище другого порядку, тому в дії не може бути похідних вище першого порядку від 4-потенціалу.

З 1-4 маємо такий попередній вигляд S_f

$$S_f = a\int F_{ik}F^{ik}dVdt;$$

Інтеграл береться по усьому тривимірному простору, а по часу – між двома фіксованими моментами часу.

Сталу величину a обираємо так, щоб функція дії мала б мінімум, як цього вимагає принцип найменшої дії. Для гаусової системи одиниць, якою ми користуємось, $a = -1/(16\pi)$. Тепер

$$S_f = -\frac{1}{16\pi}\int F_{ik}F^{ik}dVdt = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}d\Omega; \quad d\Omega = cdtdxdydz. \tag{5.11}$$

У тривимірному вигляду (згадаємо, що $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$) функція дії для поля має такий вигляд

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2 - H^2)dVdt = \int L_f dt. \tag{5.12}$$

Функція Лагранжа електромагнітного поля

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)dV. \tag{5.13}$$

Функція дії для поля з зарядами є такою

$$S = -\sum_a m_a c\int ds_a - \sum_a \frac{e_a}{c}\int A_i(x_a)dx_a^i - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}d\Omega. \tag{5.14}$$

Заряди тепер не вважаються малими, як було сказано при виведенні рівняння руху заряду в полі. Потенціал A_i та тензор F_{ik} описують дійсне поле, тобто зовнішнє поле разом із полем, створеним самими зарядами. Потенціал A_i та тензор F_{ik} залежать тепер від положення та швидкості зарядів.

В першу пару рівнянь Максвелла входять тільки поля. В другу пару повинні входити джерела поля – заряди.